O Cálculo do Número Pi pelo Método de Bekman*

por

Roberto Marques Bekman

Este texto, embora não tenha o rigor de um artigo, introduzirá um método para calcular o número Pi, simbolizado pela letra grega π. Praticamente todas as calculadoras científicas e computadores permitem acessar rapidamente o valor de π, aproximado por 3.14159265358979. A questão em discussão é como calcular o número π com várias casas decimais, muito além da capacidade imediata das calculadoras e computadores. Desse modo torna-se interessante investigar os seguintes resultados:

1) $3+\sin(3)+\sin(3+\sin(3))+\sin(3+\sin(3)+\sin(3+\sin(3))) \cong \pi$

2) $4+\sin(4)+\sin(4+\sin(4))+\sin(4+\sin(4)+\sin(4+\sin(4))) \cong \pi$

3) $9+\sin(9)+\sin(9+\sin(9))+\sin(9+\sin(9)+\sin(9+\sin(9))) \cong 3\cdot\pi$

Essas aproximações, por sua vez, derivam, por exemplo, dos seguinte resultados:

4) $3-\tan(3)-\tan(3-\tan(3))-\tan(3-\tan(3)-\tan(3-\tan(3))) \cong \pi$ vide (1)

5) $9-\tan(9)-\tan(9-\tan(9))-\tan(9-\tan(9)-\tan(9-\tan(9))) \cong 3\cdot\pi$ vide (3)

* O método apresentado é uma adaptação melhorada do método de Newton-Raphson para o Cálculo Numérico das raízes de uma função $f(x)$ onde conhecemos, analiticamente, sua derivada $f'(x)$. Observação: no momento o autor desse artigo ainda não localizou publicação do mesmo método para citar referência. A primeira implementação pelo autor data de 1992.

Os resultados 4 e 5, conforme veremos a seguir, nada mais são que uma aplicação do método de Newton-Raphson para o Cálculo Numérico para obtenção das raízes da função $f(x) = sin(x)$ pois sabemos que $sin(n \cdot \pi) = 0$, onde n é um número inteiro qualquer.

Desse modo torna-se relevante introduzir, rapidamente, o método de Newton-Raphson para a obtenção das raízes de uma função $f(x)$:

O método de Newton-Raphson aplicado ao Cálculo Numérico permite a obtenção, por aproximações sucessivas, das raízes de $f(x)$ partindo-se de um ponto próximo das mesmas. O método de Newton-Rapson é extremamente eficiente e portanto muito mais rápido que uma busca binária a partir de pontos a e b, onde $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (ou seja, de um intervalo onde a raiz de $f(x) = 0 \in [a, b]$). Contudo, o método de Newton-Rapson exige que conheçamos analiticamente a função $f'(x)$.

O referido método de aproximações sucessivas de Newton-Raphson consiste de:

i) Atribuir um valor inicial x_0 próximo à raiz desejada da função $f(x)$

ii) Calcular $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Assim, pelo método, temos que á série $S_n = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ converge rapidamente para a raíz da função na proximidade do ponto inicial x_0. Quando buscamos as raízes da função $f(x) = sin(x)$ temos que x_{i+1} deve ser obtido por $x_{i+1} = x_i - \frac{sin(x_i)}{\cos(x_i)} = x_i - \tan(x_i)$, resultando na seguinte série a partir do ponto inicial $x_0 = 3$:

$$\mathrm{x}_0 = 3$$

$$\mathrm{x}_1 = 3 - \tan(3)$$

$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 - \tan(\mathrm{x}_1) = 3 - \tan(3) + \tan(3 - \tan(3))$$

$$\mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_2 - \tan(\mathrm{x}_2) = 3 - \tan(3) - \tan(3 - \tan(3)) - \tan(3 - \tan(3) - \tan(3 - \tan(3)))$$

Cujo termo x_3 nada mais é que o resultado 4. O método de Newton-Raphson para o cálculo de π é bastante conhecido embora ineficiente para o cálculo de π com várias casas decimais pois implica na divisão de dois números de ponto flutuante de precisão intrinsecamente grandes ($sin(x)/\cos(x)$). Consideremos, assim, os resultados 1, 2 e 3: o grande diferencial do método Bekman proposto é que ele não necessita da divisão, computacionalmente custosa, de $\tan(x) = sin(x)/\cos(x)$, utilizando apenas $-sin(x)$ pois, na proximidade de π, $\cos(x) < 0$.

A obtenção dos termos x_1, x_2, x_3, ..., x_k por Bekman é muito mais rápida pois só depende do cálculo de $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ que, por sua vez, só depende de cálculos computacionalmente mais simples, a saber:

i) adição de dois números de ponto flutuante,

ii) multiplicação de dois números de ponto flutuante, e

iii) divisão de um número de ponto flutuante por um número inteiro.

A expansão $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ é conhecida como expansão em série de Taylor de $sin(x)$. Para o cálculo de $sin(x)$ não são necessários muitos termos uma vez que $(2k+1)!$ cresce vertiginosamente rápido em relação a x^{2k+1}, tornando a função $sin(x)$ uma função interessante para o cálculo de π**.**

Paralelamente aos benefícios computacionais propostos pelo método de Bekman para o cálculo de π, a função $sin(x)$ revela-se ainda mais eficiente que a função $\tan(x)$ proposta pelo método de Newton-Raphson pelas seguintes propriedades

a) $|x| \geq |sin(x)|$, resultando em $|x - \pi| \geq |sin(x)|$

b) quando $x \to \pi$, $|x - \tan(x) - \pi| \geq |x + sin(x) - \pi|$, resultando na propriedade de que a série $x_{i+1} = x_i + sin(x_i)$ (Bekman) converge mais rapidamente para π que $x_{i+1} = x_i - \tan(x_i)$ (Newton-Rapson) pois o erro $\xi = |x + sin(x) - \pi|$ é menor que o erro ξ de Newton-Rapson. Combinando os ganhos de facilidade de cálculo computacional e de velocidade de convergência da série $S_n = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de Bekman é possível calcular π com um número razoavelmente grande de casas decimais. Para tanto é suficiente implementar subrotinas de adição de dois números de ponto flutuante, multiplicação de dois números de ponto flutuante e divisão de um número flutuante por um número inteiro ("integer"). Com esse método foram calculadas, em 2006, 100.000 casas decimais de π., disponíveis em *http://www.bekman.com/pi.pdf*

Retrospectiva do Autor

Em 1984, utilizando um computador TK-82C, calculou as primeiras 4 casas decimais de π pelo método estatístico de Monte Carlo.

Em 1985 esboçou um método geométrico para o cálculo de π inspirado em Arquimedes.

Em 1987, utilizando um computador PC-XT 8088 calculou as primeiras 150 casas decimais de π pelo método de Newton-Raphson.

Em 1990, utilizando uma estação Sun 3, calculou as primeiras 3.000 casas decimais de π pelo método de Newton-Raphson.

Em 2001, utilizando um computador pessoal PC-AT Pentium, calculou as primeiras 50.000 casas decimais de π pelo método de Bekman.

Em 2006, utilizando um servidor Linux PC-AT Pentium, calculou as primeiras 100.000 casas decimais de π pelo método de Bekman.

Outros Links

http://www.apm.pt/apm/curiosidades/curio3.htm

http://www.chem.unl.edu/zeng/joy/mclab/mcintro.html

http://www.escape.com/~paulg53/math/pi/archimedes/

http://www.mat.unb.br/grad/aulas/CN/maple/Raizes.pdf

http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

http://www.google.com.br/search?hl=pt-BR&q=5493624646&btnG=Pesquisar&meta=

http://www.bekman.com/pi.pdf